Übungsblatt 5 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Allgemeine Masse

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 13, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 15

Must

Aufgabe 26 [alternative Definition "σ-endlich"]

Zeigen Sie: ein Mass μ ist genau dann σ-endlich, wenn es eine abzählbare Folge $(E_i)_{i\geq 1}$ von disjunkten Mengen gibt, sodass $E = \cup E_i$ mit $\mu[E_i] < \infty$ für alle $i \geq 1$.

Standard

Aufgabe 27 [endliche Masse und Wahrscheinlichkeiten] [3 Punkte]

Zeigen Sie: jedes endliche Mass kann mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeit geschrieben werden.

Aufgabe 28 [Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten und Massen] [3 Punkte]

Formulieren Sie - wo sinnvoll - das Pendant zu Lemma 1.8 im Fall von Massen statt Wahrscheinlichkeiten und beweisen Sie die neu gewonnenen Aussagen. Unterscheiden Sie falls nötig den Fall wo ein Ausdruck endlich oder unendlich wird.

Aufgabe 29 [$A_n \downarrow \phi$] [3 Punkte]

Bei Wahrscheinlichkeiten gilt (Satz 1.9 d):

$$A_n \downarrow \phi \Rightarrow P[A_n] \to 0.$$

Gilt ein analoges Resultat auch für allgemeine Masse? Falls ja, beweisen Sie es - falls nein: suchen Sie ein einfaches (!) Gegenbeispiel.

Aufgabe 30 [$\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$] [3 Punkte]

Zeigen Sie: $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ ist eine σ-Algebra.

Honours

Aufgabe 31 [Cantor-Funktion] [4 Punkte]

Zeigen Sie: die Cantor-Funktion ist stetig.

Übungsblatt 5 zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitstheorie”

Olivier Warin

15. April 2014

Aufgabe 26 (alternative Definition “σ-endlich”)
Behauptung: Ein Mass μ (auf dem Messraum $(E, \mathcal{E})$) ist genau dann σ-endlich, wenn es eine abzählbare Folge $(E_i)_{i\geqslant 1}$ von paarweise disjunkten Mengen (aus $\mathcal{E}$) gibt, so dass $E = \bigcup_{i\geqslant 1} E_i$ mit $\mu[E_i] < \infty$ für alle $i \geqslant 1$.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dass μ σ-endlich ist. Es gibt also nach Definition 1.24 d) eine aufsteigende Folge $(F_i)_{i\geqslant 1}$ aus $\mathcal{E}$, so dass $\bigcup_{i\geqslant 1} F_i = E$ und $\mu(F_i) < \infty$ für alle $i \geqslant 1$.

Wir definieren jetzt $E_1 = F_1$, $E_2 = F_2 \cap E_1^c$ und für $i > 2$

$$E_i = F_i \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{i-1})^c.$$

Die Folge $(E_i)_{i\geqslant 1}$ ist nun klar paarweise disjunkt und es gilt $E = \bigcup_{i\geqslant 1} E_i$. Desweiteren gilt für alle $i \geqslant 1$ offenbar $E_i \subseteq F_i$. Damit folgt (siehe Aufgabe 28) $\mu(E_i) \leqslant \mu(F_i) < \infty$ für alle $i \geqslant 1$.

Nun nehmen wir noch umgekehrt an, dass es eine abzählbare Folge $(E_i)_{i\geqslant 1}$ von paarweise disjunkten Mengen (aus $\mathcal{E}$) gibt, so dass $E = \bigcup_{i\geqslant 1} E_i$ mit $\mu[E_i] < \infty$ für alle $i \geqslant 1$.

Wir definieren jetzt für alle $i \geqslant 1$

$$F_i = \bigcup\nolimits_{j=1}^{i} E_j.$$

Die Folge $(F_i)_{i\geqslant 1}$ ist klar aufsteigend und es gilt $\bigcup_{i\geqslant 1} F_i = E$, da für alle $i \geqslant 1$ $F_i \supseteq E_i$ gilt. Weiter schliessen wir mit Aufgabe 28

$$\mu(F_i) = \mu(\bigcup\nolimits_{j=1}^{i} E_j) \; = \; \sum_{j=1}^{i} \mu(E_j) \; < \; \infty.$$

Mit Definition 1.24 d) folgt, dass μ σ-additiv ist.

■

Aufgabe 27 (endliche Masse und Wahrscheinlichkeiten)
Behauptung: Jedes endliche Mass (auf einer nicht-leeren Menge) kann mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeit geschrieben werden.

Beweis: Es sei μ ein endliches Mass auf dem Messraum $(E, \mathcal{E})$ mit $E \neq \emptyset$. Wir zeigen jetzt, dass wir eine Wahrscheinlichkeit P auf $(E, \mathcal{E})$ finden können, so dass gilt

$$\mu(A) = P[A]\mu(E) \tag{1}$$

für alle $A \in \mathcal{E}$.

Falls $\mu(E) = 0$, so ist $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{E}$ und somit ist die obige Gleichung für eine beliebige Wahrscheinlichkeit P auf $(E, \mathcal{E})$ richtig.

Falls $\mu(E) > 0$, so ist (1) gleichbedeutend mit

$$P[A] = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$$

für alle $A \in \mathcal{E}$. Wir müssen also einfach einsehen, dass dies eine Wahrscheinlichkeit definiert.

- Da $\mu(E) > 0$ und $\mu(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{E}$ folgt sofort $P[A] = \frac{\mu(A)}{\mu(E)} \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{E}$.

- Es gilt $P[E] = \frac{\mu(E)}{\mu(E)} = 1$.
- Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge in $\mathcal{E}$. Aufgrund von Definition 1.24 b) schliessen wir

$$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \frac{\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)}{\mu(E)} = \frac{1}{\mu(E)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(A_i)}{\mu(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

  Somit ist P nach Definition 1.7 eine Wahrscheinlichkeit.

■

Aufgabe 28 (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten und Massen)
Sei $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ein Massraum und seien A und B Mengen aus $\mathcal{E}$. Weiter sei $(A_i)_{i=1}^{n}$ eine endliche Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{E}$ und sei $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ eine unendliche Folge von Ereignissen aus $\mathcal{E}$.

Behauptung: Es gelten die folgenden Aussagen:

a) Für die leere Menge $\emptyset$ gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Es gilt

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \qquad \text{(endliche Additivität)}$$

   Diese Gleichung ist auch im Falle von $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \infty$ korrekt. Allerdings folgt daraus kein "Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit" wie für Wahrscheinlichkeiten P.

c) Falls $A \subseteq B$, dann gilt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Damit ist μ insbesondere monoton in dem Sinne, dass aus $A \subseteq B$ folgt $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Auch diese Eigenschaft stimmt ebenfalls im "Falle ∞".

d) Es gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B),$$

   falls $\mu(A \cap B) \neq \infty$.

   Damit ist μ sogenannt (endlich) subadditiv: $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$. Diese Ungleichung stimmt auch im "Fall ∞".

e) Es gilt

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i). \qquad \text{(Boolsche Ungleichung; subadditiv)}$$

   Diese Ungleichung ist im "Fall ∞" ebenfalls korrekt.

Beweis:

a) Dies steht direkt in der Definition 1.24 b).

b) Für jede natürliche Zahl i mit $i > n$ definiere $A_i = \emptyset$. Da nun die (unendliche) Folge $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkt ist, folgt mit Definition 1.24 b)

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

   wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Aussage aus Teil a) verwendet haben.

   Dies gilt insbesondere für $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \infty$.

c) Falls $A \subseteq B$ können wir schreiben $B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A)$ (klar disjunkt). Es folgt sofort mit Teil b):

$$\mu(B) = \mu(A \,\dot\cup\, (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

d) Es gilt offenbar $A \subseteq A \cup B$. Daraus folgt mit Teil c)

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu((A \cup B) \setminus A) \;=\; \mu(A) + \mu(B \cap A^c). \tag{$*$}$$

Da nun $B \supseteq B \cap A^c$ folgt damit mit Teil c) in jedem Fall

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B).$$

Desweiteren gilt

$$B \setminus (B \cap A^c) \;=\; B \cap (B \cap A^c)^c \;=\; B \cap (B^c \cup A) \;=\; A \cap B.$$

Also gilt wiederum nach c) (da $B \cap A^c \subseteq B$)

$$\mu(B) \;=\; \mu(B \cap A^c) + \mu(B \setminus (B \cap A^c) \;=\; \mu(B \cap A^c) + \mu(A \cap B).$$

Falls nun $\mu(A \cap B) < \infty$ können wir mit $(*)$ daraus schliessen

$$\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

und damit

$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B),$$

wie behauptet. Falls $\mu(A \cap B) = \infty$ folgt mit c) sofort $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = \infty$. Doch damit macht die Gleichung keinen Sinn mehr. (Siehe dazu auch Abschnitt 1.6.1)

e) Wir definieren eine neue Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ durch $D_1 = B_1$ und für $i > 1$:

$$D_i \;=\; B_i \cap (D_{i-1} \cup \cdots \cup D_1)^c.$$

Die Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ ist klar paarweise disjunkt und es gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Wir schliessen also mit Definition 1.24 b)

$$\mu(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i).$$

Aufgrund der Konstruktion der Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ ist ausserdem klar, dass für alle i gilt $D_i \subseteq B_i$. Es folgt damit mit Teil c)

$$\mu(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i) \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Diese Argumentation funktioniert natürlich auch wenn $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \infty$.

■

Aufgabe 29 ($A_n \downarrow \emptyset$)
Es sei $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ein Massraum und sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$, so dass $\lim_{n \to \infty} A_n = \emptyset$.

Behauptung: Dann gilt im Allgemeinen *nicht* $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit einem Gegenbeispiel. Wir wählen dazu $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mu = \lambda$ (das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}$). Desweiteren definieren wir für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} (i, i + 1/n).$$

Die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert klar gegen $\emptyset$. Gleichzeitig gilt aber

$$\lambda(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i, i + 1/n) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} 1/n \;=\; \infty,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich gilt sicher nicht $\lim_{n \to \infty} \lambda(A_n) = 0$.

■

Aufgabe 30 ($\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$)
Behauptung: Das in 1.6.8 definierte Teilmengensystem $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$.

Beweis:

- Es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ und natürlich $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}) = 0$, somit ist $\mathbb{R} \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.
- Sei $\Lambda \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$. Dies bedeutet, dass es zwei Borelmengen A und B gibt, so dass $A \subset \Lambda \subset B$ und $\lambda(B \setminus A) = 0$. Daraus folgt sofort $B^c \subset \Lambda^c \subset A^c$ und auch
$$\lambda(A^c \setminus B^c) = \lambda(A^c \cap (B^c)^c) \;=\; \lambda(A^c \cap B) \;=\; \lambda(B \setminus A) \;=\; 0.$$
Folglich liegt auch Λ^c in $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.
- Sei $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$. Es gibt also zwei Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Borelmengen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subset \Lambda_n \subset B_n$ und $\lambda(B_n \setminus A_n) = 0$. Es folgt
$$\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \;\subset\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \;\subset\; \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$
Desweiteren gilt
$$\lambda(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \setminus A_n)) \;\leqslant\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n \setminus A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 0 \;=\; 0.$$
Dies bedeutet, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ auch in $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ liegen muss.

Gemäss Definition 1.1 ist $\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ also eine σ-Algebra.

■

Aufgabe 31 (Cantor-Funktion)
Behauptung: Die Cantor-Funktion ist stetig.

Beweis: Sei $F_\infty : [0,1] \to [0,1]$ die Cantor-Funktion. In den Notationen der Vorlesung gilt
$$F_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x),$$
wobei
$$F_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \lambda(C_n \cap [0,x]).$$

Wir arbeiten jetzt mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Raum $C^0([0,1],\mathbb{R})$, welche wie folgt definiert ist:
$$\|f\|_\infty = \sup\{f(x) \,|\, x \in [0,1]\}, \quad f \in C^0([0,1],\mathbb{R}).$$
Wir zeigen zuerst per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen k, gilt
$$\|F_{k+1}(x) - F_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^k}. \tag{$*$}$$
Für $k = 0$ ist dies klar. Also können wir annehmen, dass $k > 0$ und dass $(*)$ für $k-1$ statt k korrekt ist. Nach der Defintion der Cantor-Funktion gilt für $x \in [0, 1/3^k]$:
$$F_{k+1}(x) = \frac{1}{2} F_k(3x).$$
Somit folgt
$$\sup\{|F_{k+1}(x) - F_k(x)| \,|\, x \in [0,1/3^k]\} \;=\; \frac{1}{2}\sup\{|F_k(3x) - F_{k-1}(3x)| \,|\, x \in [0,1/3^k]\} \;\leqslant\; \frac{1}{2}\|F_k - F_{k-1}\|_\infty$$

und somit mit Hilfe der Induktionsannahme

$$\sup\{|F_{k+1}(x) - F_k(x)| \mid x \in [0, 1/3^k]\} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Analog kann diese Ungleichung auf allen anderen entsprechenden Teilintervallen der Länge $1/3^k$ eingesehen werden. Wir schliessen damit $(*)$.

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Mit Hilfe von $(*)$ können wir nun schliessen:

$$\begin{aligned}\|F_m - F_n\|_\infty &= \|F_m - F_{m-1} + F_{m-1} - F_{m-2} \pm \cdots + F_{n+2} - F_{n+1} + F_{n+1} - F_n\|_\infty \\ &\leqslant \|F_m - F_{m-1}\|_\infty + \cdots + \|F_{n+1} - F_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $n \to \infty$ also gegen 0. Dies bedeutet, dass die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchy-Folge bildet. Da nun $C^0([0,1], \mathbb{R})$ mit dieser Norm vollständig ist, folgt damit dass F_∞ ebenfalls in diesem Raum liegen muss und damit stetig ist.

■