Dr. Christoph Luchsinger

Übungsblatt 6 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufallsgrössen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 13, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 15

Must

Aufgabe 32 [X und $|X|$]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $|X|$ eine Zufallsgrösse. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass dann X nicht zwingend eine Zufallsgrösse sein muss (die Umkehrung ist aber richtig: X Zufallsgrösse, dann auch $|X|$ Zufallsgrösse; kommt noch in Vlsg).

Standard

Aufgabe 33 [einfaches Beispiel zur mb] [2+2+2+2 Punkte]

Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{F} := \sigma(\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\})$.

a) Geben Sie alle Elemente von $\mathcal{F}$ an.

b) Sei die Funktion X folgendermassen definiert:

$$X(\omega) := \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 7 & \text{falls } \omega \in \{5, 6\}. \end{cases}$$

Ist X auch mb bzgl $\mathcal{F}$ und damit eine ZG auf $(\Omega, \mathcal{F})$?

c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion auf Ω an, die nicht mb ist bzgl $(\Omega, \mathcal{F})$.

d) Geben Sie ein P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ an, so dass jedem Ereignis entweder 0 oder 1 zugewiesen wird.

Aufgabe 34 [P_X] [4 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei X eine Zufallsgrösse auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie: durch

$$P_X(B) := P[X^{-1}(B)] := P[\{\omega | X(\omega) \in B\}]$$

wird eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert.

Honours

Aufgabe 35 [Verknüpfung von messbaren Abbildungen] [2 Punkte]

Seien $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$ und $(E_3, \mathcal{E}_3)$ drei Messräume. Seien $f : E_1 \to E_2$ und $g : E_2 \to E_3$ jeweils $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$-messbare bzw $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$-messbare Abbildungen. Zeigen Sie:

$$h := g \circ f : E_1 \to E_3$$

ist $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$-messbar.

Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

15. April 2012

Aufgabe 32 [X und $|X|$]
Seien $\Omega = \{☺, ☹\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \omega = ☺ \\ -2, & \text{falls } \omega = ☹. \end{cases}$$

Nun gilt

$$X^{-1}((-1, 3]) = \{☺\} \notin \mathcal{A},$$

also kann X nach Definition 2.4 *keine* Zufallsgrösse sein.

Weiter gilt

$$|X(\omega)| = 2, \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Folglich gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega \in \mathcal{A}, & \text{falls } 2 \in B \\ \emptyset \in \mathcal{A}, & \text{falls } 2 \notin B. \end{cases}$$

Nach Definition 2.4 ist also $|X|$ eine Zufallsgrösse.

Aufgabe 33 [einfaches Beispiel zur mb]
Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\})$.

a) Es gilt

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4\}\}.$$

b) Die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 7, & \text{falls } \omega \in \{5, 6\}. \end{cases}$$

Behauptung: Die Funktion X ist messbar (mb).

Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Falls $2 \in B$ und $7 \in B$ folgt $X(\omega) \in B$, für alle $\omega \in \Omega$ und damit

$$X^{-1}(B) = \Omega \in \mathcal{F}.$$

Falls $2 \in B$ und $7 \notin B$, so folgt

$$X^{-1}(B) = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F}.$$

Analog folgt, falls $2 \notin B$ und $7 \in B$, dass

$$X^{-1}(B) = \{5, 6\} \in \mathcal{F}.$$

Schliesslich gilt noch im Fall, dass $2 \notin B$ und $7 \notin B$:

$$X^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{F}.$$

Zusammengefasst gilt in jedem Fall $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, also ist X messbar (mb).

■

c) Wir definieren $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $Y(\omega) = \omega$. Nun ist Y nicht messbar, denn es gilt zum Beispiel

$$Y^{-1}((0,1]) = \{1\} \notin \mathcal{F}.$$

d) Wir wählen das folgende Dirac-Mass P auf $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$P(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist nun leicht, einzusehen, dass dies eine Wahrscheinlichkeit definiert. Ausserdem ist nach Konstruktion offensichtlich, dass jedem Ereignis entweder 0 oder 1 zugewiesen wird.

Aufgabe 34 [P_X]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei X eine Zufallsgrösse auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum.

Behauptung: Die Abbildung $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] \; = \; P[\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\}],$$

definiert eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Beweis: Aufgrund der Messbarkeit von X, ist zunächst einmal P_X wohldefiniert. Das heisst hier, dass für alle Borelmengen B $X^{-1}(B)$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ liegt und somit der Ausdruck $P[X^{-1}(B)]$ Sinn macht. (Beachte, dass die Wahrscheinlichkeit P nur auf Mengen aus $\mathcal{A}$ definiert ist!)

Weiter gilt

$$P_X(\mathbb{R}) = P[X^{-1}(\mathbb{R})] \; = \; P[\Omega] \; = \; 1.$$

Ausserdem gilt für jede Borel-Menge B klar $P_X(B) = P[X^{-1}(B)] \geqslant 0$.

Sei nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge von Borel-Mengen. Damit sind die Ereignisse $X^{-1}(B_n)$ wegen Lemma 2.2 d) ebenfalls disjunkt. Wir schliessen

$$P_X[\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n] = P[X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)] \; = \; P[\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)] \; = \; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P[X^{-1}(B_n)] \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} P_X[B].$$

Somit ist die Behauptung gezeigt.

■

Aufgabe 35 [Verknüpfung von messbaren Abbildungen]
Seien $(E_1, \mathcal{E}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2)$ und $(E_3, \mathcal{E}_3)$ drei Messräume. Seien $f : E_1 \to E_2$ und $g : E_2 \to E_3$ jeweils $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$-messbare bzw. $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$-messbare Abbildungen.

Behauptung: Die Abbildung $h = g \circ f : E_1 \to E_3$ ist $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$-messbar.

Beweis: Sei $A_3 \in \mathcal{E}_3$. Da g $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$-messbar ist, folgt dass $g^{-1}(A_3) \in \mathcal{E}_2$. Die Abbildung f ist nach Voraussetzung $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$-messbar. Somit folgt

$$f^{-1}(g^{-1}(A_3)) \in \mathcal{E}_1.$$

Weiter gilt

$$e_1 \in f^{-1}(g^{-1}(A_3)) \Leftrightarrow f(e_1) \in g^{-1}(A_3) \;\; \Leftrightarrow \;\; g(f(e_1)) = h(e_1) \in A_3 \;\; \Leftrightarrow \;\; e_1 \in h^{-1}(A_3),$$

also $h^{-1}(A_3) = f^{-1}(g^{-1}(A_3)) \in \mathcal{E}_1$. Folglich ist h $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$-messbar.

■