Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

2. Mai 2014

Aufgabe 36 (alternative Definition Zufallsgrösse I)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Behauptung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) Für alle reellen Zahlen a gilt $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{A}$.

b) Für alle reellen Zahlen b gilt $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$.

c) Für alle reellen Zahlen c gilt $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant c\} \in \mathcal{A}$.

d) Für alle reellen Zahlen d gilt $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > d\} \in \mathcal{A}$.

Beweis:

"a) ⇒ b)" Es gilt für alle reellen Zahlen b

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < b\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant b - 1/n\} \;\in\; \mathcal{A}.$$

"b) ⇒ c)" Es gilt für alle reellen Zahlen c

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant c\} \;=\; \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < c\}^c \;\in\; \mathcal{A}.$$

"c) ⇒ d)" Es gilt für alle reellen Zahlen d

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > d\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant d + 1/n\} \;\in\; \mathcal{A}.$$

"d) ⇒ a)" Es gilt für alle reellen Zahlen a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\} \;=\; \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\}^c \;\in\; \mathcal{A}.$$

■

Aufgabe 37 (alternative Definition Zufallsgrösse II)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Behauptung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) Für alle reellen Zahlen a gilt $\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{A}$ (WTS-Definition 2.1).

b) Für alle Borel-Mengen B gilt $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. (WT-Definition 2.4).

Beweis:

"a) ⇒ b)" Aufgrund von Lemma 2.2, der Definition von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und Definition 1.1, reicht es zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a, b mit $a < b$ gilt $X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{A}$.

Mit Lemma 2.2 können wir schliessen:

$$\begin{aligned} X^{-1}((a,b])^c = X^{-1}((a,b]^c) \;&=\; X^{-1}((-\infty,a] \cup (b,\infty)) \;=\; X^{-1}((-\infty,a]) \cup X^{-1}((b,\infty)) \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\} \cup \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > b\}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 36 liegen diese beiden Mengen in $\mathcal{A}$. Es folgt sofort $X^{-1}((a,b])^c \in \mathcal{A}$ und damit $X^{-1}((a,b]) \in \mathcal{A}$.

"b) ⇒ a)" Sei $a \in \mathbb{R}$. Nun gilt

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant a\} = X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A},$$

da $(-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

∎

Aufgabe 38 ($\sigma(X)$)
Es sei Ω eine nicht-leere Menge und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Behauptung: Die σ-Algebra $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ aus Lemma 2.9 ist die kleinste σ-Algebra von Ω, bezüglich der X messbar ist.

Beweis: Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, derart dass X bezüglich $\mathcal{A}$ messbar ist. Wir zeigen jetzt $\mathcal{A} \supset \sigma(X)$.

Da X bezüglich $\mathcal{A}$ messbar ist, ist dies klar denn dies bedeutet ja genau, dass für jede Borel-Menge B gilt $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Also ist per Definition jedes Element von $\sigma(X)$ auch in $\mathcal{A}$ enthalten.

Dies bedeutet genau, dass $\sigma(X)$ die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich welcher X messbar ist.

∎

Aufgabe 39 (Algebraische Operationen von Zufallsgrössen I)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A sei ein Ereignis. Weiter seien X und Y zwei Zufallsgrössen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Behauptung: Die Funktion $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{falls } \omega \in A \\ Y(\omega), & \text{falls } \omega \in A^c, \end{cases}$$

ist eine Zufallsgrösse.

Beweis: Sei B eine Borel-Menge. Nun gilt

$$Z^{-1}(B) = (A \cap Z^{-1}(B)) \cup (A^c \cap Z^{-1}(B)) \;=\; (A \cap X^{-1}(B)) \cup (A^c \cap Y^{-1}(B)) \in \mathcal{A}.$$

Beachte dazu, dass gilt

$$\begin{aligned} A \cap Z^{-1}(B) &= \{\omega \in A \,|\; Z(\omega) \in B\} \;=\; \{\omega \in A \,|\, X(\omega) \in B\} \;=\; A \cap X^{-1}(B) \\ A^c \cap Z^{-1}(B) &= \{\omega \in A^c \,|\; Z(\omega) \in B\} \;=\; \{\omega \in A^c \,|\, Y(\omega) \in B\} \;=\; A^c \cap Y^{-1}(B). \end{aligned}$$

Also ist Z eine Zufallsgrösse.

∎

Aufgabe 40 (Algebraische Operationen von Zufallsgrössen II)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y zwei Zufallsgrössen darauf.

Behauptung: Die Mengen $\{X \leqslant Y\}$, $\{X < Y\}$ und $\{X = Y\}$ sind Ereignisse.

Beweis: Nach Lemma 2.10 a) ist $Z = X - Y$ eine Zufallsgrösse. Damit folgt

$$\begin{aligned} \{X \leqslant Y\} = \{Z \leqslant 0\} &\;=\; Z^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{A} \\ \{X < Y\} = \{Z < 0\} &\;=\; Z^{-1}((-\infty, 0)) \in \mathcal{A} \\ \{X = Y\} = \{Z = 0\} &\;=\; Z^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

∎

Aufgabe 41 (Random Walk und Filtration)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $T = \{0, 1, 2, 3\}$ und $(X_i)_{i=1}^3$ seien iid Be(p)-Zufallsgrössen mit $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$. Konkret nehmen wir hier

$$\Omega \;=\; \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P[\{\omega\}] = 1/|\Omega| = 1/8$ für alle $\omega \in \Omega$ und für $i = 1, 2, 3$:

$$X_i(x_1 x_2 x_3) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_i = \bullet, \\ -1, & \text{falls } x_i = \circ. \end{cases}$$

Weiter definieren wir für $n = 0, 1, 2, 3$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Nun setzen wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 = \sigma(S_0) &= \{\emptyset, \Omega\} \\
\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{A}_0 \cup \sigma(S_1)) &= \{\emptyset, \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ\}, \{\circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \Omega\} \\
\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \sigma(S_2)) &= \{\emptyset, \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ\}, \{\bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ\}, \{\circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ\}, \{\circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ\}, \\
&\quad \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ\}, \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \{\bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ\}, \{\bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \\
&\quad \{\circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ\}, \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \\
&\quad \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \{\bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, \Omega\} \\
\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega).&
\end{aligned}$$

Für $n = 0, 1, 2, 3$ ist damit nach Konstruktion S_n $\mathcal{A}_n - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Ausserdem gilt offensichtlich $\mathcal{A}_0 \subsetneq \mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}_2 \subsetneq \mathcal{A}_3$, wie in der Aufgabenstellung gewünscht. Beachte dazu $|\mathcal{A}_0| = 2$, $|\mathcal{A}_1| = 4$, $|\mathcal{A}_2| = 16$, $|\mathcal{A}_3| = 256$.