Übungsblatt 8 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufallsgrössen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 16, Abgabe der Lösungen: Woche 17 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 19

Must

Aufgabe 42 [monotone Abbildung und Borel-Messbarkeit]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie: wenn f monoton ist, dann ist f auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mb.

Standard

Aufgabe 43 [Verteilungsfunktion von X^+ und X^-] [4 Punkte]

X habe Verteilungsfunktion F. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X^+ und X^-.

Aufgabe 44 [mehrdimensionale ZG] [4 Punkte]

Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie für $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$:

$$P[a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2] = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Aufgabe 45 [elementare Eigenschaften von F^{-1}] [4 Punkte]

Sei F^{-1} die Inverse von F mit Definition:

$$F^{-1}(x) := \inf\{t : F(t) \geq x\}, \quad x \in (0, 1).$$

Zeigen Sie:

a) Für alle (x, t) gilt $F^{-1}(x) \leq t \Leftrightarrow x \leq F(t)$.

b) F^{-1} ist monoton wachsend und links-stetig.

c) Falls F stetig ist, dann gilt $F(F^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in (0, 1)$.

Honours

Aufgabe 46 [Transformation und σ-Algebren] [3 Punkte]

Sei $Y := g(X)$ wo X eine ZG und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-Funktion. Zeigen Sie:

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(X);$$

was kann man folgern, wenn auch eine Borel-Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $X = h(Y)$?

Übungsblatt 8 zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitstheorie”

Olivier Warin

5. Mai 2012

Aufgabe 42 [monotone Abbildung und Borel-Messbarkeit]
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Behauptung: Falls f monoton ist, dann ist f auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass f monoton wachsend ist.

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen jetzt, dass $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \leqslant a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Daraus folgt dann die Behauptung mit Aufgabe 37. Falls $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}$ ist dies richtig, also können wir o.B.d.A. annehmen, dass $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{R}$. Da f monoton wachsend ist, muss A also nach oben beschränkt sein. Somit können wir $s = \sup A$ definieren. Da f monoton wachsend ist, folgt

$$A = (-\infty, s) \text{ oder } A = (-\infty, s].$$

Also ist A in jedem Fall eine Borel-Menge.

Falls jetzt f monoton fallend ist, ist die Funktion $g = -f$ automatisch monoton wachsend. Also ist g nach Obigem $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Aber daraus folgt mit Lemma 2.10, dass $f = -g$ auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.

■

Aufgabe 43 [Verteilungsfunktion von X^+ und X^-]
Es sei X eine Zufallsgrösse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sei weiter F die Verteilungsfunktion von X.

Für die Verteilungsfunktion F_{X^+} von $X^+ = \max\{0, X\}$ gilt nun

$$F_{X^+}(a) = P[\max\{0, X\} \leqslant a] = P[0 \leqslant a, X \leqslant a] = 1_{\{a \geqslant 0\}} F(a) = \begin{cases} F(a), & \text{falls } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Desweiteren gilt für die Verteilungsfunktion F_{X^-} von $X^- = -\min\{X, 0\}$:

$$\begin{aligned} F_{X^-}(a) &= P[-\min\{0, X\} \leqslant a] = P[\min\{0, X\} \geqslant -a] = P[0 \geqslant -a, X \geqslant -a] = 1_{\{a \geqslant 0\}} P[X \geqslant -a] \\ &= 1_{\{a \geqslant 0\}}(1 - P[X \leqslant -a] + P[X = -a]) = 1_{\{a \geqslant 0\}}(1 - F(-a) + P[X = -a]) \\ &= \begin{cases} 1 - F(-a) + P[X = -a], & \text{falls } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{falls } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 44 [mehrdimensionale ZG]
Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F.

Behauptung: Für $a_1 \leqslant b_1$ und $a_2 \leqslant b_2$ gilt

$$P[a_1 < X_1 \leqslant b_1, a_2 < X_2 \leqslant b_2] = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Beweis: Zur besseren Übersicht definieren wir $A_i = \{X_i \leqslant a_i\}$ und $B_i = \{X_i \leqslant b_i\}$ $(i = 1, 2)$. Nun gilt aufgrund von Lemma 1.8

$$\begin{aligned} P[a_1 < X_1 \leqslant b_1, a_2 < X_2 \leqslant b_2] &= P[(B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \setminus A_2)] = P[((B_1 \setminus A_1) \cap B_2) \setminus ((B_1 \setminus A_1) \cap A_2] \\ &= P[(B_1 \setminus A_1) \cap B_2] - P[(B_1 \setminus A_1) \cap A_2] \\ &= P[(B_1 \cap B_2) \setminus (A_1 \cap B_2)] - P[(A_2 \cap B_1) \setminus (A_1 \cap A_2)] \\ &= P[B_1 \cap B_2] - P[A_1 \cap B_2] - P[A_2 \cap B_1] + P[A_1 \cap A_2] \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, a_2). \end{aligned}$$

■

Aufgabe 45 [elementare Eigenschaften von F^{-1}]
Es sei F eine Verteilungsfunktion. Nun definieren wir $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$F^{-1}(x) = \inf\{t \,|\, F(t) \geqslant x\}.$$

Da F rechts-stetig ist, folgt

$$F^{-1}(x) = \min\{t \,|\, F(t) \geqslant x\}.$$

a) **Behauptung:** Für alle $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ gilt: $F^{-1}(x) \leqslant t \;\Leftrightarrow\; x \leqslant F(t)$.

Beweis:

“$\Rightarrow$” Da $t \geqslant F^{-1}(x)$ und da F monoton wachsend, folgt aufgrund der Definition von F^{-1} $F(t) \geqslant x$, also $x \leqslant F(t)$.

“$\Leftarrow$” Da $x \leqslant F(t)$ folgt sofort $t \in \{s \,|\, F(s) \geqslant x\}$ und damit $t \geqslant F^{-1}(x)$.

■

b) **Behauptung:** Die Funktion F^{-1} ist monoton wachsend und links-stetig.

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leqslant y$. Daraus folgt

$$\{t \,|\, F(t) \geqslant x\} \supseteq \{t \,|\, F(t) \geqslant y\}$$

und damit $F^{-1}(x) \leqslant F^{-1}(y)$, also ist F^{-1} monoton wachsend.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leqslant x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Definiere weiter für jedes n

$$\tilde{x}_n \;=\; \inf\{x_m \,|\, m \geqslant n\}.$$

Es folgt, dass die Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und zusätzlich dieselben Eigenschaften wie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt.

Die Folge $(F^{-1}(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, da F^{-1} und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide monoton wachsend sind. Wiederum aufgrund der Monotonie von F^{-1} gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $F^{-1}(\tilde{x}_n) \leqslant F^{-1}(x)$, da $\tilde{x}_n \leqslant x$. Also ist die Folge $(F^{-1}(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend, folglich also konvergent.

Wir können also schliessen

$$[F^{-1}(x), \infty) = \{t \,|\, F(t) \geqslant x\} \;=\; \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \{t \,|\, F(t) \geqslant \tilde{x}_n\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} [F^{-1}(\tilde{x}_n), \infty) \;=\; [\displaystyle\lim_{n\to\infty} F^{-1}(\tilde{x}_n), \infty).$$

Also $\lim_{n\to\infty} F^{-1}(\tilde{x}_n) \;=\; F^{-1}(x)$.

Weiter gilt für alle n:

$$F^{-1}(x) \geqslant F^{-1}(x_n) \;\geqslant\; F^{-1}(\tilde{x}_n) \;\xrightarrow{n\to\infty}\; F^{-1}(x).$$

Somit muss $\lim_{n\to\infty} F^{-1}(x_n) = F^{-1}(x)$ gelten. Folglich ist F^{-1} links-stetig.

■

c) **Behauptung:** Falls F stetig ist, dann gilt $F(F^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in (0,1)$.

Beweis: Sei $x \in (0,1)$. Wenn F stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz sicher ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass $F(t_0) = x$. Da F monoton wachsend ist, folgt damit

$$F^{-1}(x) = \min\{t \,|\, F(t) \geqslant x\} \;=\; \min\{t \,|\, F(t) = x\}.$$

Daraus folgt sofort $F(F^{-1}(x)) = x$, da $F^{-1}(x) \in \{t \,|\, F(t) = x\}$.

■

Aufgabe 46 [Transformation und σ-Algebren]
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine Zufallsgrösse auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion. Weiter definieren wir $Y = g \circ X$.

Behauptung: Es gilt $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$.

Beweis: Sei $A \in \sigma(Y)$, d.h. es gibt eine Borelmenge B, so dass

$$\begin{aligned} A = Y^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega \,|\, Y(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in B\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in g^{-1}(B)\} \\ &= X^{-1}(g^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Da g eine Borel-Funktion ist, folgt dass $g^{-1}(B)$ eine Borel-Menge ist und damit nach Obigem $A \in \sigma(X)$.

∎

Falls es jetzt noch eine Borelfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $X = h \circ Y$ geben würde, so würde nach der gerade bewiesenen Behauptung (mit vertauschten Rollen von X und Y) folgen $\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$ und damit $\sigma(X) = \sigma(Y)$.