Übungsblatt 9 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

2. Mai 2014

Aufgabe 47 ($P[A] = 0, 1$ und Unabhängigkeit)
Es seien A, B zwei Ereignisse.

Behauptung: Falls $P[A] \in \{0, 1\}$, dann ist A und B unabhängig.

Beweis: Falls $P[A] = 1$ folgt mit Aufgabe 20

$$P[A \cap B] = P[B] \; = \; P[A]P[B].$$

Falls $P[A] = 0$ folgt

$$P[A \cap B] = 0 \; = \; P[A]P[B],$$

da $A \cap B \subset A$.
Es gilt also auf jeden Fall $P[A \cap B] = P[A]P[B]$, also sind nach Satz 3.7 A und B unabhängig. Des weiteren folgt aus $P[A]P[A] = P[A \cap A] = P[A]$ sofort, dass $P[A] \in \{0, 1\}$.

■

Aufgabe 48 (Abbildung unabhängiger Zufallsgrössen)
Es seien X, Y zwei unabhängige Zufallsgrössen und g_1, g_2 borelsch.

Behauptung: Die Zufallsgrössen $g_1 \circ X$ und $g_2 \circ Y$ sind ebenfalls unabhängig voneinander.

Beweis: Seien B_1, B_2 zwei Borel-Mengen. Da $g_1^{-1}(B_1)$ und $g_2^{-1}(B_2)$ ebenfalls Borel-Mengen sind und da $X \amalg Y$ folgt

$$\begin{aligned} P[g_1 \circ X \in B_1, g_2 \circ Y \in B_2] &= P[X \in g_1^{-1}(B_1), Y \in g_2^{-1}(B_2)] \; = \; P[X \in g_1^{-1}(B_1)]P[Y \in g_2^{-1}(B_2)] \\ &= P[g_1 \circ X \in B_1]P[g_2 \circ Y \in B_2]. \end{aligned}$$

Also sind $g_1 \circ X$ und $g_2 \circ Y$ nach Definition 3.1 unabhängig.

■

Analog folgt die Behauptung für mehr als 2 Zufallsgrössen.

Aufgabe 49 (Unabhängigkeit von A_i und A_i^c)
Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse.

Behauptung: Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig genau wenn $A_1^c, \ldots A_n^c$ unabhängig sind.

Beweis: Da $(A_i^c)^c = A_i$ reicht es eine Richtung zu zeigen. Nehmen wir also an, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig sind.
Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = 1 - t$. Nun gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$1_{A_i^c} \; = \; 1 - 1_{A_i} \; = \; g \circ 1_{A_i}.$$

Da g klar (z.b. nach Aufgabe 42) borelsch ist, folgt mit Aufgabe 48, dass $1_{A_1^c}, \ldots, 1_{A_n^c}$ unabhängig sind. Wir schliessen: $A_1^c, \ldots, A_n^c$ sind unabhängig.

■

Aufgabe 50 ($P[\bigcup_i A_i]$und Unabhängigkeit)
Seien $A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse.

Behauptung: Es gilt

$$P[\bigcup_{i=1}^n A_i] = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P[A_i]).$$

Beweis: Da $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig sind, sind nach Aufgabe 49 auch $A_1^c, \ldots, A_n^c$ unabhängig. Also können wir mit Satz 3.7 schliessen

$$P[\bigcup_{i=1}^n A_i] = 1 - P[\bigcap_{i=1}^n A_i^c] \;=\; 1 - \prod_{i=1}^n P[A_i^c] \;=\; 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P[A_i]).$$

■

Aufgabe 51 (Borel-Cantelli I und II)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Definiere $A_n = \emptyset$ für alle natürliche Zahlen n. Nun gilt klar

  $$\sum_{n=1}^\infty P[A_n] = \sum_{n=1}^\infty 0 \;=\; 0 \;<\; \infty$$

  und es gilt auch, wie von Satz 1.11 (Borel-Cantelli I) vorausgesagt,

  $$P[\limsup_n A_n] = P[\emptyset] \;=\; 0.$$

- Definiere $A_n = \Omega$ für alle natürlichen Zahlen n. Da für alle n gilt $P[A_n] = 1$ sind $A_1, A_2, \ldots$ nach Aufgabe 47 unabhängig. Weiter gilt

  $$\sum_{n=1}^\infty P[A_n] = \sum_{n=1}^\infty 1 \;=\; \infty$$

  und es gilt auch, wie von Satz 3.8 (Borel-Cantelli II) vorausgesagt,

  $$P[\limsup_n A_n] = P[\Omega] \;=\; 1.$$