# Übungsblatt 10 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

10. Mai 2014

**Aufgabe 52 ($P[X \in (-\infty, \infty)] = 1$ und $E[X] = \infty$)**
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ((0,1], \mathcal{B}((0,1]), \lambda)$, wobei $\lambda$ das Lebesque-Mass auf $(0,1]$ bezeichnet. Weiter definieren wir $X : (0,1] \to \mathbb{R}$ durch $X(\omega) = 1/\omega$. Nun gilt klar $P[X \in (-\infty, \infty)] = P[\Omega] = 1$ und für $a \geqslant 1$ haben wir

$$F_X(a) = P[X \leqslant a] \;=\; P[\{\omega \in \Omega \,|\, \omega \geqslant 1/a\}] \;=\; P[[1/a, 1]] \;=\; 1 - 1/a.$$

Weiter gilt für $a < 1$ klar $F_X(a) = 0$. Durch ableiten erhalten wir mit

$$f_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 1/a^2, & a \geqslant 1 \end{cases}$$

eine Dichtefunktion von $X$. Wir schliessen (mit der Vorlesung WTS)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \;=\; \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx \;=\; \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \;=\; \infty,$$

wie gewünscht.

**Aufgabe 53 (Wohldefiniertheit von $E[X]$ bei einfachen Zufallsgrössen)**
Es sei $X$ eine einfache Zufallsgrösse.

**Behauptung:** Die Definition des Erwartungswertes $E[X]$ hängt *nicht* von der Darstellung von $X$ ab.

*Beweis:* Seien

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i} \;=\; \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{B_j}$$

zwei Darstellungen von $X$. ($(A_i)_{i=1}^n$ und $(B_j)_{j=1}^m$ sind beides Partitionen von $\Omega$ und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ sind reelle Zahlen).

Nun gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P[A_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i P[A_i \cap \Omega] \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i P[A_i \cap \textstyle\bigcup_{j=1}^m B_j] \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i P[\textstyle\bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)]$$
$$= \sum_{i,j} a_i P[A_i \cap B_j].$$

Falls es ein $\omega \in A_i \cap B_j$ gibt, so folgt $X(\omega) = a_i = b_j$. Somit gilt in jedem Fall $a_i P[A_i \cap B_j] = b_j P[A_i \cap B_j]$. Wir schliessen somit aus Symmetriegründen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P[A_i] = \sum_{i,j} b_j P[A_i \cap B_j] \;=\; \sum_{j=1}^{m} b_j P[B_j].$$

■

**Aufgabe 54 (Mit Kanonen auf Spatzen geschossen I, II und -III)**
Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen.

a) **Behauptung:** Es gilt $P[\liminf_n A_n] \leqslant \liminf_n P[A_n]$.

*Beweis:* Wie auf Seite 5 des Skriptes gesehen gilt $\mathbf{1}_{\liminf_n A_n} = \liminf_n \mathbf{1}_{A_n}$ und nach dem Lemma von Fatou (Satz 4.6) gilt

$$P[\liminf_n A_n] = E[\mathbf{1}_{\liminf_n A_n}] = E[\liminf_n \mathbf{1}_{A_n}] \leqslant \liminf_n E[\mathbf{1}_{A_n}] = \liminf_n P[A_n].$$

■

b) **Behauptung:** Falls $A_n \uparrow A$ gilt auch $P[A_n] \uparrow P[A]$.

*Beweis:* Es gilt klar $\mathbf{1}_{A_n} \uparrow \mathbf{1}_A$ und damit nach Satz 4.7:

$$\lim_{n\to\infty} P[A_n] = \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A_n}] = E[\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}] = E[\mathbf{1}_A] = P[A].$$

Ausserdem ist die Folge $(P[A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ klar monoton wachsend. Zusammengefasst haben wir also $P[A_n] \uparrow P[A]$ gezeigt.

■

c) **Behauptung:** Falls die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist, so gilt $P[\bigcup_{n=1}^\infty A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n]$.

*Beweis:* Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $Y_k = \mathbf{1}_{A_k}$. Nun gilt klar für alle $k$ $Y_k \geqslant 0$. Da weiter $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt ist, folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k = \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k} \leqslant 1 < \infty.$$

Wir schliessen mit Satz 4.8

$$P[\bigcup_{k=1}^\infty A_k] = E[\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k}] = E[\sum_{k=1}^{\infty} Y_k] = \sum_{k=1}^{\infty} E[Y_k] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k].$$

■

**Aufgabe 55 (Kontrast zur Positivität von Erwartungswerten)**
Es sei $X$ eine Zufallsgrösse mit $X \geqslant 0$ und $E[X] = 0$.

**Behauptung:** Es gilt $P[X = 0] = 1$.

*Beweis:* Nehmen wir an, dass $P[X = 0] < 1$ gilt.
Da $X \geqslant 0$ folgt

$$F_X(0) = P[X \leqslant 0] = P[X = 0] < 1.$$

Damit gibt es aufgrund der Rechtsstetigkeit von $F_X$ ein $\varepsilon > 0$ mit $F_X(\varepsilon) < 1$ und damit $P[X \geqslant \varepsilon] > 0$. Weil offenbar $X \geqslant \varepsilon \mathbf{1}_{X\geqslant\varepsilon}$ gilt, schliessen wir damit (mit Aufgabe 56 b))

$$0 = E[X] \geqslant E[\varepsilon \mathbf{1}_{X\geqslant\varepsilon}] = \varepsilon P[X \geqslant \varepsilon] > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also muss $P[X = 0] = 1$ gelten.

■

**Aufgabe 56 (Betrag innen und aussen; Monotonie in $L^1$)**
a) Sei $X \in L^1$.

**Behauptung:** Es gilt $|E[X]| \leqslant E[|X|]$.

*Beweis:* Mit den aus der Vorlesung bekannten Notationen $X^+ = \max\{0, X\}$ und $X^- = -\min\{0, X\}$ folgt

$$|E[X]| = |E[X^+] - E[X^-]| \leqslant |E[X^+]| + |E[X^-]| = E[X^+] + E[X^-] = E[|X|].$$

■

b) Seien $X, Y \in L^1$ mit $X \leqslant Y$.

**Behauptung:** Es gilt $E[X] \leqslant E[Y]$.

*Beweis:* Definiere $Z = Y - X \geqslant 0$. Aufgrund der Positivität von Erwartungswerten, haben wir $E[Z] \geqslant 0$ und damit

$$E[Y] - E[X] = E[Y - X] = E[Z] \geqslant 0,$$

womit die Behauptung folgt.

■

**Aufgabe 57 (Fatou, volles Programm)**
Sei $Y \in L^1$ und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrössen mit $|X_n| \leqslant Y$ für alle $n$.

**Behauptung:** Es gilt

$$E[\liminf_n X_n] \leqslant \liminf_n E[X_n] \leqslant \limsup_n E[X_n] \leqslant E[\limsup_n X_n].$$

*Beweis:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n + Y \geqslant 0$, da $|X_n| \leqslant Y$. Ausserdem ist $|X_n + Y| \leqslant 2|Y|$ und damit $E[|X_n + Y|] < \infty$, also $X_n + Y \in L^1$. Mit dem Lemma von Fatou (Satz 4.6) können wir schliessen:

$$\begin{aligned} E[\liminf_n X_n] &= E[\liminf_n (X_n + Y - Y)] = E[\liminf_n (X_n + Y)] - E[Y] \\ &\leqslant \liminf_n E[X_n + Y] - E[Y] = \liminf_n E[X_n]. \end{aligned}$$

Mit $-X_n$ statt $X_n$ folgt aus Obigem:

$$\limsup_n E[X_n] = -\liminf_n E[-X_n] \leqslant -E[\liminf_n -X_n] = E[\limsup_n X_n].$$

Da die Unlgeichung $\liminf_n E[X_n] \leqslant \limsup_n E[X_n]$ klar ist, haben wir damit die Behauptung bewiesen.

■

**Bemerkung:** Mit $X_n = \mathbf{1}_{A_n}$ für eine Folge von Ereignissen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir damit

$$P[\liminf_n A_n] \leqslant \liminf_n P[A_n] \leqslant \limsup_n P[A_n] \leqslant P[\limsup_n A_n],$$

also Satz 1.10.