Übungsblatt 11 zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitstheorie”

Olivier Warin

26. Mai 2014

Aufgabe 58 ($|X| = 0$ f.s. $\Rightarrow E[|X|] = 0$)
Es sei X eine Zufallsgrösse mit $P[|X| = 0] = 1$.

Behauptung: Es gilt $E[|X|] = 0$.

Beweis: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von nicht-negativen einfachen Zufallsgrössen mit $X_n(\omega) \uparrow |X(\omega)|$ für alle ω.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, fest. Da X_n eine einfache Zufallsgrösse ist, gibt es eine Darstellung der Form

$$X_n = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

wobei $(A_i)_{i=1}^N$ eine Partition von Ω und $a_1, \ldots, a_N$ reelle Zahlen sind. Nun gilt

$$E[X_n] = \sum_{i=1}^{N} a_i P[A_i] = \sum_{\substack{i=1\\a_i>0}}^{N} a_i P[A_i].$$

Aufgrund der Monotonie der Folge folgt, dass für alle ω mit $X_n(\omega) > 0$ auch $|X(\omega)| > 0$ gelten muss. Mit anderen Worten gilt $A_i \subset \{|X| > 0\}$ für alle $i = 1, \ldots, N$ mit $a_i > 0$. Wir schliessen

$$E[X_n] \leqslant \sum_{i=1}^{N} a_i P[|X| > 0] = 0.$$

Also $E[X_n] = 0$ und damit natürlich $E[|X|] = \lim_{n\to\infty} E[X_n] = 0$.

∎

Aufgabe 59 (L^p, L^q wo $0 < p < q < 1$)
Seien $0 < p < q < 1$.

Behauptung: Es gilt $L^q \subset L^p$ und im Allgemeinen $L^p \not\subset L^q$.

Beweis: Es sei $X \in L^q$. Setze $s = 1/p$ und $r = 1/q$. Nun gilt $1 < r < s$ und $E[(|X|^{pq})^s] = E[|X|^q] < \infty$, also $X^{pq} \in L^s$. Mit Hilfe der Lyapunov-Ungleichung (Korollar 4.27) folgt damit

$$E[|X|^p]^{1/r} = E[(|X|^{pq})^r]^{1/r} \leqslant E[(|X|^{pq})^s]^{1/s} = E[|X|^q]^{1/s} < \infty,$$

also $X \in L^p$. Damit wäre der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Für den zweiten Teil geben wir noch ein konkretes Gegenbeispiel an. Sei P eine absolut-stetige Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Dichte (vgl Definition 1.20)

$$f_P(x) = \begin{cases} Kx^{-\xi-1}, & x > 1 \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $K \in \mathbb{R}$ eine Normierungskonstante und $\xi \in \mathbb{R}$ mit $p < \xi < q$. Sei $X = id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Zufallsgrösse mit Dichtefunktion f_P (wegen der speziellen Wahl von X haben wir $f_P = f_X$).

Nach Aufgabe 63 gilt nun

$$E[|X|^p] = \int_1^\infty Kx^{p-\xi-1}dx < \infty$$
$$E[|X|^q] = \int_1^\infty Kx^{q-\xi-1}dx = \infty.$$

Also $X \in L^p$ und $X \notin L^q$.

■

Aufgabe 60 (Vervollständigung des Beweis Satz 4.21)
Sei $X \in L^1$.

Behauptung: Dann gilt $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$.

Beweis: Da wir in Satz 4.22 die Formel direkt bewiesen haben (ohne Satz 4.21), folgt dies direkt aus Satz 4.22 (wähle $g(x) = x$ - oder gehe den Beweis nochmals durch). Es ist nichts mehr zu beweisen.

■

Aufgabe 61 (Tschebyschew und Konsorten)
Es sei X eine nicht-negative Zufallsgrösse und g eine positive, wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_+$.

Behauptung: Für alle $a > 0$ gilt

$$P[X \geqslant a] \leqslant \frac{E[g(X)]}{g(a)}.$$

Beweis: Sei $a > 0$. Nun gilt

$$E[g(X)] \geqslant E[g(X)\mathbf{1}_{\{g(X)\geqslant g(a)\}}] \geqslant E[g(a)\mathbf{1}_{\{g(X)\geqslant g(a)\}}] = g(a)P[g(X) \geqslant g(a)] \geqslant g(a)P[X \geqslant a],$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung noch die Monotonie von g verwendet haben.
Die Behauptung folgt nun unmittelbar daraus.

■

Aufgabe 62 (Konvergenz in Verteilung/Wahrscheinlichkeit, Ergänzung Satz 5.4)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien weiter $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrössen darauf und a eine reelle Zahl, derart dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P[X_n \leqslant t] = P[a \leqslant t] = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \geqslant a \\ 0, & \text{falls } t < a. \end{cases}$$

D.h. die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen a.

Behauptung: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen a.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} P[|X_n - a| > \varepsilon] &= P[X_n - a > \varepsilon] + P[X_n - a < -\varepsilon] \leqslant P[X_n > a + \varepsilon] + P[X_n \leqslant a - \varepsilon] \\ &= 1 - P[X_n \leqslant a + \varepsilon] + P[X_n \leqslant a - \varepsilon]. \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P[|X_n - a| > \varepsilon] &\leqslant 1 - \lim_{n\to\infty} P[X_n \leqslant a + \varepsilon] + \lim_{n\to\infty} P[X_n \leqslant a - \varepsilon] \\ &= 1 - P[a \leqslant a + \varepsilon] + P[a \leqslant a - \varepsilon] = 1 - 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in Wahrscheinlichkeit gegen a.

■

Aufgabe 63 (Vervollständigung Beweis Satz 4.17)
Sei F eine absolut-stetige Verteilungsfunktion mit (stückweise) stetiger Dichtefunktion f. Sei g nicht-negativ und (stückweise) stetig.

Behauptung: Es gilt

$$\int g dF = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Beweis: Nehmen wir zunächst an, dass g eine Treppenfunktion ist. Wir können also g in der Form $g = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{I_j}$, wobei $(I_j)_{j=1}^{m}$ eine Partition bestehend aus Intervallen von $\mathbb{R}$ bildet und $b_1, \dots, b_m$ reelle Zahlen sind. Nun gilt nach Definition 4.14:

$$\begin{aligned}\int g dF = E_F[g] &= \sum_{j=1}^{m} b_j P_F[I_j] = \sum_{j=1}^{m} b_j \int_{I_j} f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} b_j \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{1}_{I_j}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{1}_{I_j}(x) \right) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.\end{aligned}$$

Damit wäre die Behauptung für Treppenfunktionen bewiesen.

Im Allgemeinen gibt es (nach Lemma 2.13) eine monoton wachsende Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht-negativen Treppenfunktionen, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \uparrow g(x)$. Nun folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 4.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f(x)dx = \lim_{n\to\infty} E_F[g_n] = E_F[g] = \int g dF.$$

Beachten Sie, dass wir dabei den Satz über die monotone Konvergenz zwei mal angewendet haben. Das erste mal haben wir den entsprechenden Satz aus der Analysis und das zweite mal den erwähnten Satz 4.7 verwendet.

■