Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Dr. C.J. Luchsinger

9 Crash-Course in Statistics IV: Zeitreihenanalyse (MA, AR und ARMA)

Literatur Kapitel 9 auf www.math-jobs.com/timeseriesanalysis.html

9.1 Definition & Motivation - Philosophische Probleme

Definition 9.1 [Zeitreihe; engl. time series)] *Eine Zeitreihe ist eine (zeitlich) geordnete Folge* $(x_t)_{t \in T}$ *von Daten (Beobachtungen). Zentral ist, dass die Reihenfolge der Messungen relevant ist und sukzessive Folgenglieder im allgemeinen* **nicht** *als unabhängig betrachtet werden dürfen.*

Beispiele von Zeitreihen / Einsatz der Zeitreihenanalyse:

1. **Vorhersage von Preisen:** Mit vielfältigsten Methoden (auch aus der Zeitreihenanalyse) versucht man, Aktienkurse selber vorherzusagen. Neben naiven Versuchen und Problemstellungen gibt es aber auch sinnvollere Einsatzgebiete: wenn man verderbliche, nicht lagerbare Güter hat, welche nur zu einer gewissen Jahreszeit geerntet werden, so kann man auf Grund von früheren Daten unter Berücksichtigung von Witterung und saisonalen Einflüssen etc. versuchen, die künftigen Preise vorherzusagen. Damit ist nicht gesagt, dass man einen Informationsvorsprung gegenüber anderen Marktteilnehmern hat. Aber die heutigen Preise für Güter, welche erst in der Zukunft explizit ausgetauscht werden, können so eher begründet werden.
2. **Volkswirtschaftliche Untersuchungen:** Man beobachtet (u.a. wegen der Bauwirtschaft) im Winter in den entwickelten Ländern der nördlichen Hemisphäre eine höhere Arbeitslosigkeit als im Sommer. Wenn nun gegen Herbst hin in der Wirtschaft ein Aufschwung einsetzt, so kann die Arbeitslosigkeit zwar immer noch steigen, weil die Wintermonate kommen. Hingegen kann man mittels Berücksichtigung von saisonalen

Einflüssen eventuell doch bereits schliessen, dass die *saisonbereinigte* Arbeitslosigkeit zurückgeht.

3. **Lieferung von statistischen Grundlagen für ökonomische Theorien:** Ökonomische Theorien und Modelle werden nicht einfach im Elfenbeinturm geboren. Mit exploratorischer Statistik werden ökonomische Zeitreihen analysiert. Theorien über Wechselkursrelationen werden nach mehrdimensionaler Zeitreihenanalyse aufgestellt.
4. **Globale Erwärmung:** Mittlerweile gibt es gute Methoden der Wetter*nach*hersage; "wie war das Wetter in den letzten 500 Jahren in Europa?". Man versucht dann z.B. einen kausalen Zusammenhang zwischen einer vermuteten globalen Erwärmung und den Treibhausgasen nachzuweisen. Die Resultate sind übrigens bis jetzt nicht so eindeutig, wie es manchmal gesagt wird.

Bemerkungen zu Definition 9.1 Nochmals: Die Folgenglieder der Messungen sind im allgemeinen nicht unabhängig voneinander. Tägliche Aktienkurse sollten nicht als unabhängige Realisationen von positiven Zufallsgrössen modelliert werden - eher die Zuwächse davon! Die bisherige Statistik kann man auch als Spezialfall der Zeitreihenanalyse auffassen, in der die Folgenglieder doch unabhängig sind.

Wir werden uns auf Zeitreihen beschränken, bei denen die Zeit diskret ist (nicht aber die Werte, welche die Beobachtungen annehmen). T ist meist die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der ganzen Zahlen. Damit ist nicht gesagt, dass die Werte in der Realität nur zu diskreten Zeitpunkten anfallen und diese Zeitpunkte zudem äquidistant sind.

Wenn man eine Realisation $X_t(\omega_1), 1 \leq t \leq N$, einer Zeitreihe (z.B. simulierter Aktienkurs) betrachtet, so ist es wohl als MathematikerIn unvermeidlich, dass man Muster zu erkennen versucht und Hypothesen aufstellt. Darunter werden sich viele Hypothesen befinden, welche man bei einer nochmaligen Realisation $X_t(\omega_2), 1 \leq t \leq N$, sofort fallenlassen wird. In der Realität hat man eigentlich nur *eine* Zeitreihe, eine Realisation. Wenn man diese betrachtet (als Plot), so wird man wohl auch viele Hypothesen aufstellen, welche "unsinnig" sind. Es gibt aber keine nochmalige Realisation, kein $X_t(\omega_2), 1 \leq t \leq N$, (oder gar noch mehr Realisationen), mit deren Hilfe erste Versuche Versuche bleiben. Man könnte deshalb folgern, dass das Betrachten eines Plots (Diagramms), etwas gefährliches ist, weil es zu Fehlschlüssen verleiten könnte. Diese Gefahr besteht! Hingegen ist es trotzdem klar, dass der erste Schritt der Datenanalyse darin besteht, dass man einen Plot macht und diesen auf den Betrachter "einwirken lässt". Wir wollen jetzt einige Plots auf dem Handout betrachten.

Worum geht es in der Zeitreihenanalyse?

In der Zeitreihenanalyse hat man allgemein vier Ziele vor Augen:

1. **Beschreibung** Wie bereits erwähnt, ist der erste Schritt ein Plot der Zeitreihe. Dann wird man diverse einfache, deskriptive Methoden anwenden: Im Handout sahen wir einen Wocheneffekt und vermuten auch einen Saisoneffekt; zudem gab es auch einen leichten Aufwärtstrend (verbunden mit immer grösseren Ausschlägen). Die Variation (darunter verstehen wir die umgangssprachliche Variation, Varianz), welche man in gewissen Zeitreihen beobachtet, kann eventuell beinahe vollständig auf derart offensichtliche Ursachen zurückgeführt werden. Meist ist jedoch eine kompliziertere Zeitreihenanalyse von Nöten; zur Modellierung wird man dann Modelle einsetzen, welche in Teil 9.3 vorgestellt werden. Im Teil "Beschreibung" fliesst auch "gesunder Menschenverstand" ein. Mathematische Pharisäer dürften damit Schwierigkeiten haben. Die Abbildung $\{$Serie von Daten$\} \rightarrow \{$Hypothesen, Vermutungen$\}$ "ist nicht aus C^∞"; diese "Abbildung" ist mathematisch nicht formalisiert. Das ist eine Stärke (grosse Flexibilität, Innovation), birgt aber auch Gefahren (Fehlschlüsse, Problem der Trennung "exploratorische" und "konfirmatorische" Statistik).
2. **Erklärung** Wenn man zwei Zeitreihen beobachtet, so kann man einen Teil der Variation in der einen Zeitreihe eventuell mit der anderen Zeitreihe erklären. Beispielsweise kann man Verkaufszahlen bei Erdöl mit den Preisen von Erdöl zu erklären versuchen (oder Exporte/Importe mit Wechselkursen). Wir werden in diesem Skript (aus Zeitgründen) dieses Gebiet nicht behandeln.
3. **Vorhersage** Wenn man Werte einer Zeitreihe bis heute hat, so will man vielleicht die

zukünftigen Werte vorhersagen. Wie weiter oben bereits angeführt, ist dies auch bei Preisen *nicht* im naiven Sinne zu verstehen, dass man dann quasi eine Geldmaschine besitzt. In der Finanzwelt sind gute Schätzungen der Volatilität σ_t von Aktien wichtig wegen den sogenannten derivativen Produkten.

4. **Kontrolle** Wenn man in einem industriellen Prozess eine Variable (Konzentration) möglichst um einen Zielwert konzentrieren will, so wird man mit der Zeitreihenanalyse auch Eingreifkriterien finden wollen.

9.2 Trend- und Saisonbereinigung, Stationarität

9.2.1 Trend- und Saisonbereinigung

Wir haben auf dem Handout Plots von Zeitreihen gesehen, die offenbar Trends und saisonale Schwankungen aufweisen. Die Zeitreihenanalyse im engeren Sinne befasst sich jedoch mit Zeitreihen, in denen der Trend und die saisonalen Einflüsse bereits entfernt wurden (Ziel ist die sogenannte Stationarität (vgl. Definition 9.3)). Folgende Verfahren werden unter vielen anderen eingesetzt:

Die einfachste Form eines **Trends** ist sicher die Familie "linearer Trend + Fehler". Dabei geht man davon aus, dass der Wert x_t zur Zeit t mit Konstanten β_0, β_1 als Realisation einer Zufallsgrösse von der Form

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t \tag{9.1}$$

dargestellt werden kann. Dabei fordert man sinnvollerweise $E[\epsilon_t] = 0$. Dann sind die Mittelwerte gegeben durch die Gerade $m_t = (\beta_0 + \beta_1 t)$, dies ist der Trendterm. β_0 und β_1 kann man beispielsweise mit der Methode der kleinsten Quadrate anpassen. Wenn man dann eine Trendfunktion angepasst hat, so kann man diese von den ursprünglichen Daten subtrahieren und erhält damit die Residualzeitreihe, welche man mit speziellen Methoden aus 9.3 weiter analysieren möchte. Die ϵ_t sind hier (vgl. als Kontrast mit Kapitel 8) im allgemeinen *nicht* unabhängig voneinander!

Es gibt drei Haupttypen von Modellen für **saisonale Schwankungen**:

$$A : X_t = m_t + s_t + \epsilon_t$$

$$B : X_t = m_t s_t + \epsilon_t$$

$$C : X_t = m_t s_t \epsilon_t.$$

Dabei ist m_t der Mittelwert, s_t die Saisonkomponente und ϵ_t der Fehler. Eine Methode, um den additiven Saisonbeitrag zum verschwinden zu bringen ist die geschickte Bildung von Differenzen (Monatsdaten und Saison ist 1 Jahr):

$$y_t := \Delta_{12} x_t := x_t - x_{t-12}.$$

9.2.2 Stationarität

In der Zeitreihenanalyse sind die Mittelwertfunktion, die Varianzfunktion und die Autokovarianzfunktion (bzw. Autokorrelationsfunktion) sehr wichtig:

Definition 9.2 [Kennfunktionen von Zeitreihen]

** Die Mittelwertfunktion einer Zeitreihe X_t ist definiert als*

$$\mu(t) := E[X_t].$$

** Die Varianzfunktion einer Zeitreihe ist definiert als*

$$\sigma^2(t) := V[X_t].$$

** Die Autokovarianzfunktion einer Zeitreihe ist definiert als*

$$\gamma(s,t) := E[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))].$$

Man beachte, dass $\gamma(t,t) = \sigma^2(t)$.

Wie bereits angedeutet, wollen wir in der Zeitreihenanalyse im engeren Sinne Trend und Saison weg haben. Wir fordern sogenannte

Definition 9.3 [(Schwache) Stationarität] *Wir nennen eine Zeitreihe X_t stationär, wenn X_t sowohl mittelwert- wie auch autokovarianzstationär (und damit auch varianzstationär) ist:*

$$\mu(t) = \mu \; \forall \; t \in T$$

und mit $\tau := t - s$

$$\gamma(\tau) = \gamma(t-s) := \gamma(s,t) := E[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))]. \tag{9.2}$$

Dabei ist in (9.2) gemeint, dass die Autokovarianz nur vom sogenannten Lag τ abhängt, egal wo (t) wir sind.

Geben Sie ein (triviales) Beispiel einer stationären Zeitreihe an:

Geben Sie ein (triviales) Beispiel einer Zeitreihe an, welche zwar Mittelwert- aber nicht autokovarianzstationär ist:

9.2.3 Die Autokorrelationsfunktion

Da die Autokovarianzfunktion γ *nicht* skaleninvariant ist, betrachtet man meist die Autokorrelationsfunktion

$$\rho(\tau) := \gamma(\tau)/\gamma(0) = \gamma(\tau)/\sigma^2. \tag{9.3}$$

Wir setzen jetzt voraus, dass eine stationäre Zeitreihe X_t Mittelwert μ, Varianz σ^2, Autokovarianzfunktion $\gamma(\tau)$ und Autokorrelationsfunktion $\rho(\tau)$ besitzt.

Satz 9.4 [elementare Eigenschaften von ρ] *Sei X_t eine stationäre Zeitreihe. Dann gilt:*

a) $\rho(0) = 1$.

b) $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$

c) $|\rho(\tau)| \leq 1$

d) Keine Eineindeutigkeit: Eine gegebene Zeitreihe hat selbstverständlich nur eine Autokorrelationsfunktion. Es ist aber leider im allgemeinen nicht so, dass es zu einer gegebenen Autokorrelationsfunktion nur eine Zeitreihe geben kann. Damit ist es also nicht klar, welches Modell man wählen soll, um eine gegebene Realisation einer Zeitreihe zu erklären.

Beweis von Satz 9.4 a) folgt sofort aus (9.3). b) Da $\gamma(\tau) = \rho(\tau)\sigma^2$ beweist man dies am besten via

$$\gamma(\tau) = Cov[X_t, X_{t+\tau}] = Cov[X_{t+\tau}, X_t] = \gamma(-\tau).$$

c) Diese Eigenschaft gilt bereits bei "normalen" Korrelationen. d) Wir müssen nur ein Gegenbeispiel finden, es folgt in 9.3.

$\square$

Wenn man die Folge der $\rho(\tau)$ berechnet hat, so stellt man sie am besten im sogenannten *Korrelogramm* graphisch dar. Das Korrelogramm ist ein Plot der $\rho(\tau)$ gegen den Lag. Dieser Plot ist der zweite Plot, den man bei einer Zeitreihenanalyse anfertigen sollte (nach der Zeitreihe selber). Mehr dazu in 9.3.

9.3 Modelle für Zeitreihen: die zwei Grundbausteine MA und AR

Bei den einführenden Bemerkungen haben wir darauf hingewiesen, dass wir mit einer Zeitreihe zwar durchaus eventuell sehr viele Beobachtungen haben (grosses N, vor allem in der Finanzmathematik), aber nur *eine Realisation*. Wir werden von jetzt an aber *unterstellen*, dass diese Zeitreihe eben eine *Realisation* einer Zeitreihe X_t ist. Damit wenden wir uns also den erklärenden Modellen zu.

9.3.1 Vollkommen zufällige Zeitreihe, "White Noise"

Eine vollkommen zufällige Zeitreihe (Z_t) ist eine Folge von iid Zufallsgrössen. Damit sind auch Mittelwerte, Varianzen und Kovarianzen gleich (falls sie existieren). Die Kovarianzen sind jeweils für Lags $\neq 0$ gleich 0 (wegen der Unabhängigkeit). Diese Zeitreihe ist also stationär. Diese Zeitreihe nennt man auch "White Noise". Es muss keine normalverteilte Folge sein! Korrelogramm:

9.3.2 Moving Average (MA)

Sei (Z_t) ein White Noise Prozess; der Mittelwert sei 0 und die Varianz σ_Z^2. Wir nennen dann (X_t) einen Moving Average Prozess der Ordnung q (MA[q]), wenn er sich in der Form

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \ldots + \beta_q Z_{t-q} \tag{9.4}$$

darstellen lässt (die Z_t sind unbeobachtet). Dabei sind die β_i's Konstanten; die Z's werden meist derart normiert, dass $\beta_0 = 1$. Wenn die Z's normalverteilt sind, dann ist auch X_t normalverteilt. Wir erhalten sofort, dass

$$E[X_t] = 0$$

und

$$V[X_t] = E[X_t^2] = \sigma_Z^2 \sum_{i=0}^{q} \beta_i^2,$$

da die Z_t unabhängig sind. Schreiten wir zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion: Es gilt für die Autokovarianzfunktion:

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= Cov(X_t, X_{t+k}) = E[X_t X_{t+k}] = \\ &= Cov(\beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}, \beta_0 Z_{t+k} + \beta_1 Z_{t+k-1} + \ldots + \beta_q Z_{t+k-q}).\end{aligned}$$

Es sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden; man beachte, dass die (Z_t) iid sind:

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } k > q \\ \sigma_Z^2 \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} & \text{falls } 0 \leq k \leq q \\ \gamma(-k) & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

$\gamma(k)$ ist offenbar unabhängig von t. Zudem ist der Mittelwert konstant 0. Damit ist dieser Prozess stationär.

Die Autokorrelationsfunktion ist demnach

$$\rho(k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k > q \\ \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} \Big/ \sum_{i=0}^{q} \beta_i^2 & \text{falls } 0 \leq k \leq q \\ \rho(-k) & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

Für Modellanpassungen zentral ist, dass die Autokorrelationsfunktion eines MA(q)-Prozesses bei Lag q *abbricht*.

Betrachten wir die Autokorrelationsfunktion eines MA(1)-Prozesses mit $\beta_0 = 1$. Wir erhalten

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \\ \beta_1/(1+\beta_1^2) & \text{falls } k = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass die Autokorrelationsfunktion gleich ist, ob z.B. $\beta_1 = 0.5$ oder $\beta_1 = 2$. Offenbar kann man von der Autokorrelationsfunktion nicht eindeutig auf den zugrundeliegenden Prozess schliessen (vgl. Satz 9.4 d)).

Der Einsatz von MA-Prozessen in der Ökonomie ist vielfältig und kann theoretisch begründet werden. Entscheide der Regierungen oder Notenbanken, Änderungen von Rohstoffpreisen und so weiter haben nicht nur einen direkten Effekt auf wichtige Kennziffern (Bruttosozialprodukt), sondern wirken eventuell lange nach, eh sie vollständig ausklingen.

9.3.3 Autoregressive Prozesse (AR)

Sei (Z_t) wieder ein White-Noise-Prozess. Der Mittelwert sei jeweils 0 und die Varianz $V(Z_t) = \sigma_Z^2$. Dann nennen wir eine Zeitreihe (X_t) Autoregressiver Prozess der Ordnung p (AR[p]), wenn sie eine Darstellung der Form

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t. \tag{9.5}$$

hat. Dies ist in der Tat etwas wie eine "Regression". Nur sind die Regressoren alte Werte der Zeitreihe; X wird auf sich selbst regressiert, deshalb *Auto*regressiver Prozess. Wir werden immer "p" für die Ordnung der autoregressiven Prozesse benutzen und "q" für die MA-Prozesse; ebenso Parameter α für AR-Prozesse und β für MA-Prozesse;

Betrachten wir drei AR[1]-Prozesse ein bisschen genauer (die Z's seien normalverteilt):

a) $X_t = 0.8X_{t-1} + Z_t$

b) $X_t = -0.8X_{t-1} + Z_t$

c) $X_t = 2X_{t-1} + Z_t$.

Die Autokorrelationsfunktion von AR[1] lässt sich am besten berechnen, indem man in (9.5) mit $p = 1$ sukzessive die X_{t-k} eliminiert:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t = Z_t + \alpha_1(\alpha_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) = Z_t + \alpha_1 Z_{t-1} + \alpha_1^2(\alpha_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) = \ldots.$$

Für $|\alpha| < 1$ erhalten wir einen sinnvollen mathematischen Ausdruck. Nach kleinen Rechnungen (freiwillige Übung, mathematische Rechtfertigung für Limesresultat in dieser Vorlesung nicht möglich) erhält man

$$\rho(k) = \alpha^{|k|}.$$

In obigen Beispielen a) und b) können wir jetzt das Korrelogramm zeichnen. Bezeichnenderweise fällt die Autokorrelationsfunktion geometrisch ab; zudem alterniert sie bei negativem α.

9.3.4 (Gemischte) ARMA-Prozesse

Die MA- und AR-Prozesse kann man als *die* Grundbausteine der Zeitreihenanalyse bezeichnen. Wir haben viele Freiheiten: die Ordnung p resp. q kann frei gewählt werden; je grösser die Ordnung, desto mehr Parameter stehen uns zur Verfügung, um ein Modell an eine gegebene empirische Reihe anzupassen. Was ist jedoch von einem AR[20]- oder MA[63]-Prozess zu halten? Wenn viele Parameter zur Verfügung stehen, kann man fast jeden endlichen Datensatz an ein Modell anpassen. Man möchte aber ein Modell, bei dem möglichst wenig Parameter vorkommen, welche zudem auch eine reale Bedeutung (Interpretation) haben. Die zentrale Bedeutung von ARMA$[p, q]$-Prozessen liegt darin, dass wir zum Beispiel mit einem ARMA[1,1]-Prozess (mit 2 Parametern!) viel umfassender Eigenschaften von empirischen Zeitreihen einfangen können als mit den einfachen MA- oder AR-Prozessen. Ein ARMA$[p, q]$-Prozess besteht aus p AR-Termen und aus q MA-Termen. Die Bestimmungsgleichung lautet

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots + \beta_q Z_{t-q}. \tag{9.6}$$

Die allgemeine Berechnung der Autokorrelationsfunktion ist sehr kompliziert. Hingegen wollen wir den wichtigen Fall eines ARMA[1,1] doch angeben: Man erhält für die Autoko*varianz*funktion die Werte

$$\gamma(0) = \frac{1 + 2\alpha\beta + \beta^2}{1 - \alpha^2}\sigma_Z^2,$$

$$\gamma(1) = \frac{(1 + \alpha\beta)(\alpha + \beta)}{1 - \alpha^2}\sigma_Z^2,$$

und für $k \geq 2$ erhält man die Werte

$$\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1)$$

und somit

$$\gamma(k) = \alpha^{k-1}\gamma(1). \tag{9.7}$$

Dieses Resultat ist auch konsistent für die Fälle wo $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ (überprüfen!).

9.4 Das weitere Vorgehen

In einer Zeitreihenanalyse muss man ein Modell an eine gegebene Zeitreihe anpassen. Wichtigstes Hilfsmittel ist die Autokorrelationsfunktion. Die Autokorrelationsfunktion wird aus den Daten geschätzt. Die Analyse mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion nennt man auch Analyse im Zeitbereich (der Gegensatz ist die Spektralanalyse mit Hilfe des Spektrums; sie wird Analyse im Frequenzbereich genannt (hier nicht eingeführt)).

<u>Das Kochrezept ist dabei folgendermassen:</u>

1. Man untersucht die Art, wie die Daten gewonnen wurden (Zuverlässigkeit, Fehlerquellen, etc.)
2. Wieviele Daten habe ich zur Verfügung? (es sollten mehr als 50 sein)
3. Wozu betreiben wir eine Datenanalyse, Modellierung? Wozu wird das Modell gebraucht?
4. Plot der Daten, Trend- und Saisonbereinigung, geschätztes Korrelogramm; als Schätzer der Kovarianzfunktion dient zum Beispiel bei Daten $x_1, \ldots, x_n$ der Vorschlag $\hat{\gamma}(\tau) := [\sum_{i=1}^{n-\tau}(x_i - \overline{x})(x_{i+\tau} - \overline{x})]/n \ \forall \tau \in \{0, \ldots, n-1\}$, dann $\hat{\rho}(\tau) := \hat{\gamma}(\tau)/\hat{\gamma}(0)$
5. Modellvorschlag auf Grund des geschätzten Korrelogramms (als Resultat sagen wir dann zum Beispiel: MA[3], AR[1], ARMA[1,1])
6. Modellschätzung (die p, q, α_i, β_j)
7. Modellüberprüfung (Residuenanalyse)

Bücher über Zeitreihenanalyse für MathematikerInnen konzentrieren sich häufig auf die *Modellschätzung*. Da aber heute sehr gute Statistikpakete mit vollständig ausprogrammierten Schätzprogrammen existieren, kann man dies in einer anwendungsorientierten Einführung knapp bemessen. Der schwierigste Teil besteht sicher im Modellvorschlag. Dieser bedarf der Erfahrung mit realen Datensätzen. Des Weiteren mündet obiges Prozedere oft in eine längere Schlaufe, wenn man bei der Modellüberprüfung einerseits feststellen muss, dass das Modell so nicht passt und man sich andererseits (und hoffentlich) von der Residuenanalyse her auch gleich zu neuen Modellen inspirieren lässt.